ギルサノフの定理の数理統計学的理解と証明

松原　望 (東京大学大学院新領域創成科学研究科)

2002.9.7-10

「ギルサノフの定理」は、確率微分方程式を応用した「数理ファイナンス」の理論において、ポートフォリオ戦略の価値過程 $V(t)$ に対しいわゆる「無裁定の仮定」[1]を保証するために用いられる。$V(t)$ がブラウン運動の確率積分で表現されていれば、$V(t)$ はマルチンゲールになるから仮定は満たされる。よって、基礎確率空間 (P) で市場過程が (多次元) ブラウン運動になっていればよいが、市場過程は一般にはドリフト項のある伊藤過程で、これは期待できない。

もし基礎確率空間の変換 $(P \to Q)$ を行い、i)Q での表現ではドリフト項が消え、ii) 変換前 P と後 Q で零集合が保存される (確率測度 P, Q が互いに絶対連続つまり「同値」) なら、変換後の基礎確率空間 Q で $V(t)$ はマルチンゲールとなり、無裁定の仮定が満たされる。この変換の Radon-Nikodym 微分を与えるのが下記ギルサノフの定理である。P に対し Q を「同値なマルチンゲール測度」(equivalent martingale measure) といい、変換 $P \to Q$ を簡単に「測度変換」(change of measure) という。

定理の内容はマルコフ過程としての拡散過程の研究に遡り、歴史は長い (Cameron- Martin(1944), 丸山儀四郎)。かつては「ずれの公式」「ずれの変換」と呼ばれたが、ギルサノフ (1960) が有用なとらえ方を提示した。

[**ギルサノフの定理**]　$W(t)(0 \le t \le T)$ をブラウン運動とし、伊藤過程

$$dY(s) = u(s)ds + dW(s) \tag{1}$$

に対し、確率過程

$$M(s) = e^{-\int_0^s u(t)dW(t) - (1/2)\int_0^s (u(t))^2 dt} \quad (0 \le s \le T) \tag{2}$$

は、ある付帯条件 (Novikov 条件) の下でマルチンゲールとなり、$M(T)$ を Radon-Nikodym 微分として測度 Q を

$$dQ/dP = M(T) \tag{3}$$

[1]裁定の機会が存在しない、すなわち $V(0) = 0$ でスタートした価値過程が満期 T に $V(T) \geq 0$(a.s.) かつ正の確率で $V(T) \succ 0$ になることは、ない

で定義すると、Q は P と同値な確率測度となり、Q のもとで $Y(s)$ はブラウン運動となる。（なお、$M(T)$ を $M(s)$ としても同結果となる）。

証明は、確率過程の専門書の従来のものはもとより、最近のものでも、平板で本質がわかりにくいか (Øksendal)、本質には若干触れるが数学的詳細に渉りすぎて難渋か (Karatzas-Shreve)、和書 (長井、舟木) のごとくマルコフ過程に忠実で初学者に近づき難いか、いずれにせよ統計学者には相当に縁遠い。経済 (ことに金融) への応用を扱っている Duffie では、証明は省略されている。統計学のこの方面の研究・教育を考えるとこの事情は今後問題が多い。

実は「ギルサノフの定理」は本質は数理統計学的である。以下、ギルサノフの定理の導出のヒューリスティックを与えよう。

補題 1　$B(t)$ をブラウン運動とすると、$e^{B(t)-t/2}$ はマルチンゲールとなる。
これは対数正規分布から証明は自明。

補題 2　$B(t)$ をブラウン運動とすると、$Y(t)=e^{\sigma B(t)+\mu t}$ は確率微分方程式

$$dY(t)=(\mu+\sigma^2/2)Y(t)dt+\sigma Y(t)B(t) \tag{4}$$

に従う。
これは、伊藤の公式による。$Y(t)$ は一般的にはマルチンゲールにはならない。
$\mu=-u^2/2, \sigma=u$ として、上記でドリフトを消すと、

系(補題 2 の一般化)　$B(t)$ をブラウン運動とすると、u を実数として

$$Y(t)=e^{uB(t)-(1/2)u^2t} \tag{5}$$

はマルチンゲールとなる。

補題 3　$X_1, X_2 \dots, X_n$ は独立とする。$\{X_i\}$ についての $u_1, u_2, \dots, u_n$ の slippage 検定

$$\begin{aligned} &H_0 : X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(0,1) \\ &H_1 : X_i \sim N(u_i, 1)\ (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \tag{6}$$

の尤度比は、

$$dP_1/dP_0=e^{\sum u_iX_i-(1/2)\sum u_i^2} \tag{7}$$

であり、いずれも n の関数としてマルチンゲールとなる (Siegmund)。
(7) は $\mathbf{u}=(u_1, u_1, \dots, u_n)$ のドリフト（あるいは slippage) であるから、$-\mathbf{u}$ はドリフトを消すための操作である。極限移行で定理が出る。

文献は略。筆者のホームページ:`http://www5.ocn.ne.jp/~qmss/` を参照。