数学で考える民主主義
―社会科学にも数学の光を―

２００６年８月１１日

松　原　　望
上智大学外国語学部
国際関係副専攻

http://www5.ocn.ne.jp/~qmss/
http://www.qmss.jp/qmss/text/outline/chapter1.htm

順位の集計の信頼性

順位で論じるのにはいろいろと問題

	A	B	C	D	E	計
1	20	15	27	22	21	105
2	24	16	29	10	22	101
3	22	17	7	24	28	98
4	21	18	29	6	22	96
5	3	18	28	23	23	95
6	2	16	29	25	22	94
7	21	16	10	23	23	93

５科目中２科目で最下位、３科目で７人中５位でも総合トップ

＜順序の公理＞

多様な社会的概念が「順序」という数学的概念で語られる．モノに対する順序を基礎としてその選択，決定の手続きとその評価としての「社会」を構想する枠組みが，まさに「社会選択」の科学に他ならない．

順序

　社会の数学プログラムの構成の最も基本的で最初の要素はまず「順序」orderである. そこで「基数的」cardinal, 「序数的」ordinalという数の２つの基本的性質（用法）をあげておこう.

基数･序数

- 序数

　数1,2,3,･･････を1st,2nd,3rd, ･･････と用いれば,「順序」の性質が用いられたことになる（序数）.

- 基数

　1個,2個,3個あるいは長さ（1m,2m,3m, ･･････）のように用いれば,「多さ」の性質が用いられたことになる（基数）. 基数は単位とともに用いられることが多い.

行動の研究のための議論の出発点

A, B･･･等で，「財」などの人間の選択の対象を表すとき，行動の研究のための最も基本的で明確な議論の出発点は，その決定者が

Bを採らないでAを採る，AをBより好む

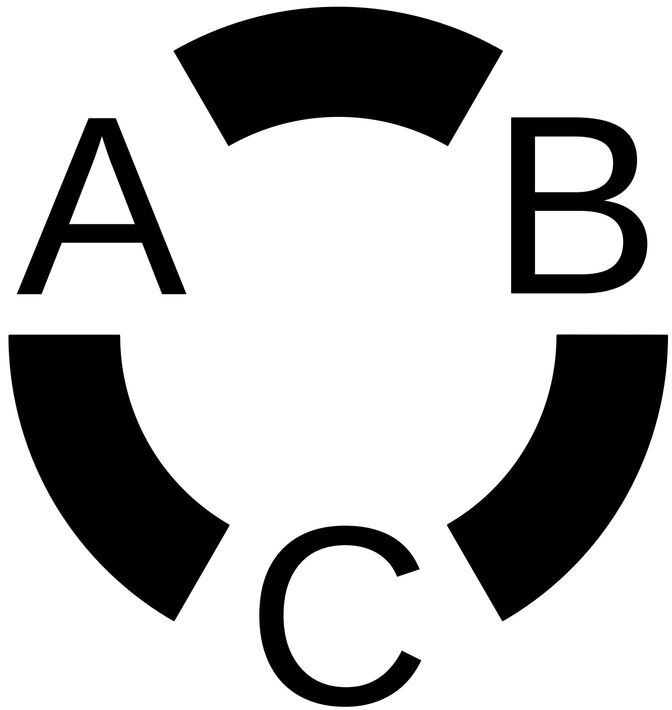
という外からわかる行動である．

選好順序

　採る，好むとかの定義を明確にしておきさえすれば，この事実には紛れがない．このような行動の形式で述べられた事実を（‘AはBより好まれる’ A is preferred to B.‘AはBより良い’A is better than B.などとよぶ．） $\mathrm{A} \succ \mathrm{B}$ と表す．これを最も基本的な価値の明示と見よう．一般に，このように用いる順序を「選好順序」preference orderingとよぶ．ふつうは，A～B（‘AとBは選別できない，無差別である’．One is indifferent between A and B.）も含めてとする．

図1　円環的順序

推移律が成立しない典型ケース.



選好順序の公理

a） A ≿ A

b） A ≿ B， B ≿ Cならば A ≿ C

が成り立つことを仮定して議論を進める．a）は,≿ が厳密には‘少なくとも無差別かまたは良い’の意味であることを示し，b）は「推移律 」とよばれ、たとえば選好順序の関係が円環（cycle）のような矛盾を起こさないことを要請している．しかし，b）が満足されないことは多い．3つの≿がそれぞれ相異なった側面に注目しているものであったり，選好順序が時と場合で確率的であったりすれば，成立しない．

全順序と半順序

また，場合によっては，そもそもの始めに

c）任意のAとBは比べうる；

$A \succsim B$ または $B \succsim A$

を要請する．数学的にはa），b），c）がそろえば，$\succsim$を「線形（全）順序」，a），b）ならば，「半順序」semi-orderという．特に断らなければ全順序を考える．数学的には，同等（～）も認めれば，選択肢x, y, zに対する選好順序には表1の13通り存在する．

表１　３選択肢の選好順序

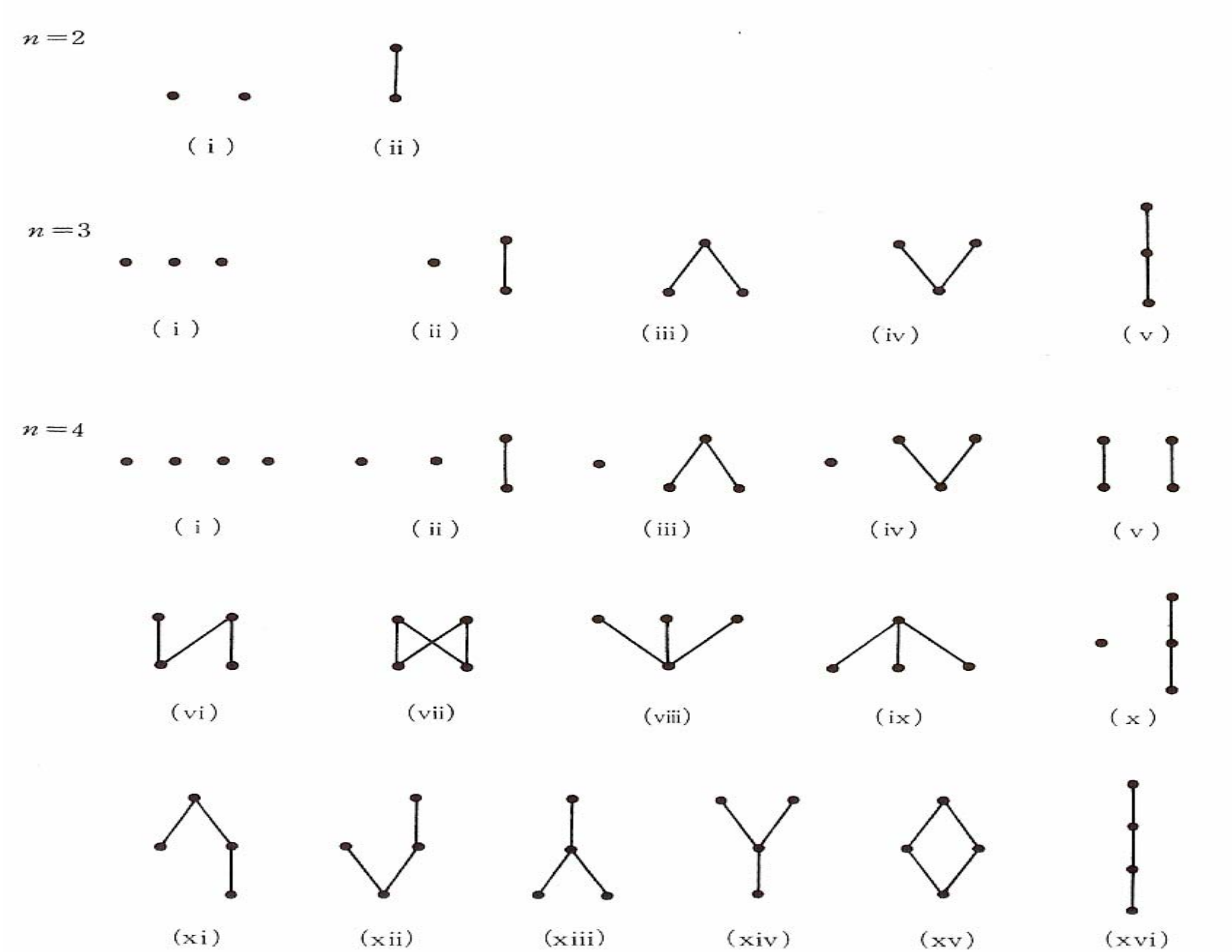
上段≻中断≻下段とする.

R^1	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	R^{12}	R^{13}
x	x	y	y	z	z	x	y	z	$x \sim y$	$x \sim z$	$y \sim z$	$x \sim y \sim z$
y	z	x	z	x	y	$y \sim z$	$x \sim z$	$x \sim y$	z	y	x	
z	y	z	x	y	x							

半順序のすべて（順序型 ）

　さらに選択肢の個数nが$n > 2$以上の場合，その半順序のタイプ――――集合論で「順序型」といわれる――――は$n = 2,3,4$のとき，図2のように列挙されている．実に多様であることがわかる．ただし，ここでは簡単のために～は考えていない．$n \geq 6$のときの順序型は，個数の公式さえよく知られるところではない．

図2　半順序



$n=2$
(i)
(ii)
$n=3$
(i)
(ii)
(iii)
(iv)
(v)
$n=4$
(i)
(ii)
(iii)
(iv)
(v)
(vi)
(vii)
(viii)
(ix)
(x)
(xi)
(xii)
(xiii)
(xiv)
(xv)
(xvi)

＜投票のパラドックス（逆説）＞

2人以上の人がそれぞれの選好順序を持っていて，しかも全体としては1つの順序にまとめたいという「順序の集計」の問題がある．たとえば，A,B,C の3人が選択肢 x, y, z に対して，それぞれ

$$\mathrm{A}: x \succ y \succ z, \quad \mathrm{B}: x \succ z \succ y, \quad \mathrm{C}: y \succ z \succ x \quad （\#）$$

のように評価していたとしよう．

順序の集計（社会的順序）

x, y, zをペアにして（一対比較という），３人の「多数決」の投票では，x 対 y の比較で x，y 対 z で y，x 対 z で x が優るから，この多数決投票による結果を

$$x \succ_s y, \qquad y \succ_s z, \qquad x \succ_s z$$

と表すと，３人全体としては

$$x \succ_s y \succ_s z$$

という選好順序 $\succ_s$ にまとまったことになる．この $\succ_s$ を社会的順序という．これに対して個人 A,B,C のそれぞれが持っている上記３つの選好順序（＃）を $\succ_A$，$\succ_B$，$\succ_C$ と表してよかろう．

コンドルセの「投票の逆説」

候補者をX，Y，Zとする．60人の投票者のうち，Xが23票，　Yが19票，Zが18票とったとする．そのとき，普通のやり方ではXが選出される．しかし，この方法は必ずしも満足できるものではない．

一対比較で集計

なぜなら，いま

場合Ｉ

i)　Xに投票した23人は，すべてZがYよりよい，

ii)　Yに投票した19人は，すべてZがXよりよい，

iii) Zに投票した18人も，16人がYがXよりもよく，
2人はXがYよりよい，

とそれぞれ考えている，と仮定する．

一対比較で集計

このとき，

a）Xに有利な2つの命題は，XがYよりよい場合とXがZよりよい場合であるが，前者は25対35で少数，後者は27対37で少数である．また，

b）Yに有利な2つの命題は，YがXよりよい場合とYがZよりよい場合であるが，前者は35対25で多数，後者は19対41で少数である．さらに，

c）Zに有利な2つの命題は，ZがXよりよい場合とZがYよりよい場合であるが，前者は37対23で多数，後者は49対19で多数である．

投票結果とは逆

すなわち,
投票はもっとも有利なZを最下位に,
もっとも不利なXを最上位に置くのである.

場合Ⅱ

また，i)，ii)，iii)を

i') Xに投票した23人は，すべてYがZよりよい，

ii') Yに投票した19人中，17人はZがXよりよく，
2人はXがZよりよい，と考え，また

iii') Zに投票した18人中，10人はXがYよりもよく，
8人はYがXよりよい，

と考えている，という仮定でおきかえると，

42対18でYはZよりよく,
35対25でZはXよりよく,
33対27でXはYよりよい

こととなり，X, Y, Zは円環的（cyclic）な

―――――三つの巴の―――――

　順序におかれ、今度は投票は決定不能の困難に行き着いてしまう.

「関数」として見る ——
Kenneth Arrow の
「民主主義の不可能性定理」

「投票」は民主主義の最も基本的な構成要素であると考えられている．その投票に機能不全があるということは，民主主義ははたして存在しうるのか，という社会科学上の課題を生じさせる．個人の集まりから「社会」を導き出す方法の研究は一般に「社会厚生関数」social welfare functionといわれている．

民主的な社会厚生関数はあるか

　社会厚生関数は諸個人の価値選好の判断を集計した（関数としての）社会全体の価値選好であり，選択肢の集合 $\mathrm{X}=\{x, y, z\cdots\}$ に対する各個人の順序の組に対し,社会の順序 R_s を指定する関数

$$R_s = f(R_1, R_2, \cdots R_n) \qquad (※)$$

　である．もともと，「社会厚生関数」そのものは社会学者バーグソン(Bergson)によって提唱されたものであった．経済学者アロー(スタンフォード大学教授、ノーベル経済学賞受賞)の場合、個人から社会を決めるという意味で社会的（social）であり、この上に民主的決定の基礎が作られるのである．(※)に示した f だけでも極めて膨大な個数である．この中から「民主的」な f を探すことになる．

練習問題

$\mathrm{X}=\{x,y,z\}, n=3$ のとき f は何通りあるか。

答

組み合わせを数えれば、13の 13^3 乗（13^{13^3}）通り
（約 2.155×10^{2447}）

実際

AからBへの写像の全体は直積集合B^A,その濃度(個数)は $\#(B)^{\#(A)}$となる.

（プロファイル）

なお，個人iが$x \succ y$と判断としてもこの表記では，次の

（a）$x \succ y \succ z$

（a'）$x \succ z \succ y$

の，いずれかなのかが区別できない．実際，選択肢全体Xに対して有している判断X全体の並びで指定される．この並び方を「プロファイル」profileという．これらのプロファイルはa,a'･･･，最大限で，同順位（無差別）を除外すれば$n=3$なら$3!=6$通り，入れれば13通りあり、$R_1, R_2, \cdots R_n$は、これらプロファイルの値をとる変数である．

順列

注）数学的には「順列」を考えればよい.

k個のモノの順列の全体をΣ_kとおくと,

上述の f の定義域は$(\Sigma_k)^n$,値域は Σ_k

となる.

順列に対し無制約

もとよりこれら全てがプロファイルとして起こるか否かは別問題である(たとえば，戦争$\succ$平和など)．個人iにとってそのプロファイルaでxがyより好まれことを強調して

$$xR_i y(a) \quad \text{あるいは} \quad x \succ_i y(a)$$

と表記しよう．また

$$N = \{1, 2, \cdots, n\}$$

とする．

民主主義の内容の公理化

「民主主義」探しは,民主主義の要件を記号論理で表現することから始まる．記号論理は命題論理（命題の要素を「でない」「あるいは」「かつ」「ならば」で結ぶ）と述語論理に分けられる．主語，述語，‘全ての’∀,‘ある’ヨを新たに導入して，命題論理をより精密に形式化した体系を述語論理predicate logicという．述語論理をもちいて,選好順序*R*をとりこんで行くことにする．

命題論理と述語論理

一般に、「関係」は最も簡単には‘xはyと（xとyは）Rである’と表現できる. Rは何かについて述べられている内容（関係の内容）である. また「1は正の数である」「地球は惑星である」はいずれも‘xはPである’と表現される. Pは何かについて述べられる内容（ここでは集合）である. これらのようにそれについて述べられている当の個物 x, yなどを<u>主語</u>subject, その内容 $P, R \cdots$を<u>述語</u>predicateという.（主語, 述語は論理上のもので文法上のものとは一致しない. ）

命題論理（まとめ）

論理語	記号	用い方	意味
否定	¬, ～	¬p	pではない
連言	∧, &	p ∧ q	pかつq
選言	∨	p ∨ q	pまたはq
条件	⊃, →	p ⊃ q	pならばq
同値	≡	p ≡ q	pとqは同値

述語論理(まとめ)

基本構造	記号
主語	$x, y, z \cdots$
述語(一項) (二項関係) (三項関係)	$R(\cdot), P(\cdot), F(\cdot)$ $R(\cdot,\cdot), F(\cdot,\cdot)$ $R(\cdot,\cdot,\cdot)$
限定記号 ‘すべてのxについて’ ‘あるxについて’ ‘あるxが存在して’	 $\forall x$(全称記号) $\exists x$(存在記号)
論理語	$\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$

さて，社会厚生関数の「厚生」welfareとは
人々の人間らしい暮らし向きという意味だから，
その集計は民主的なものという4条件

[公理U]

個人選好の領域無制約性

個人は自由に選好順序を持ちうる:

各 R_i の定義域は $\sum$.

［公理P］

市民権（citizen's sovereignty）$R_1, R_2, \cdots R_n$ でxがyよりよいならば, R_sでも xがyよりよい.

$$\forall x, y \in X \quad (\forall i \in N \quad xR_i y \to xR_s y)$$

注）パレート最適性（Pareto optimality）ともいわれる. どのR_iでもxが最大元ならR_sでもそうである.

[公理I]

無関係選択肢からの独立性

x とyの選好を決めるときに, x, y について $R_1, R_2, \cdots R_n$ で xがyよりよいならば, ほかの $z(z \neq x, z \neq y)$ と, $R_1, R_2, \cdots R_n$ において比較した結果に関係なく, R_sでもx が yよりよい.

$$\forall a, b, \forall x, y \in X$$

$$(\forall i \in N \quad (xR_i y(a) \leftrightarrow xR_i y(b)) \rightarrow (xR_s y(a) \leftrightarrow xR_s y(b)))$$

#［公理ND］

非独裁（non-dictatorship）

ある R_i が R_s と一致していてはならない：

$$\neg(\exists i \in N, \forall x, y \in X \quad (xR_i y \leftrightarrow xR_s y))$$

不可能性定理（K.Arrow, 1951）

U, P, I —>$\exists i \in N, \forall x, y \in X \quad (xR_i y \leftrightarrow xR_s y)$

証明　略

　アロ―の発見は「公理U,P,I,NDを満足する民主的な社会厚生関数（民主的決定）は存在しない」という数学的結果であり，「アロ―の不可能性定理」Arrow's impossibility theoremといわれる.

高校生にもわかる「投票の逆説」の研究

不等式の練習

変数とその値

	X, Y, Zの選好順序	数	コンドルセの場合 I	コンドルセの場合 II	練習
a	$X \succ Y \succ Z$	n_0	0	23	0
b	$X \succ Z \succ Y$	n_1	23 (23)	0 (23)	23 (23)
c	$Y \succ Z \succ X$	n_2	19	17	9
d	$Y \succ X \succ Z$	n_3	0 (19)	2 (19)	10 (19)
e	$Z \succ X \succ Y$	n_4	2	10	10
f	$Z \succ Y \succ X$	n_5	16 (18)	8 (18)	8 (18)

条件の不等式

$N(\cdots)$で･･･を満たす数，あるいはその票数を表すと

$$N(\mathrm{Y} \succ \mathrm{Z}) = (n_2 + n_3) + n_0 = N(\mathrm{Y}) + n_0$$

$$N(\mathrm{Z} \succ \mathrm{Y}) = (n_4 + n_5) + n_1 = N(\mathrm{Z}) + n_1$$

$$N(\mathrm{Z} \succ \mathrm{X}) = (n_4 + n_5) + n_2 = N(\mathrm{Z}) + n_2$$

$$N(\mathrm{X} \succ \mathrm{Z}) = (n_0 + n_1) + n_3 = N(\mathrm{X}) + n_3$$

$$N(\mathrm{X} \succ \mathrm{Y}) = (n_0 + n_1) + n_4 = N(\mathrm{X}) + n_4$$

$$N(\mathrm{Y} \succ \mathrm{X}) = (n_2 + n_3) + n_5 = N(\mathrm{Y}) + n_5$$

コンドルセの場合 I

$N(\mathrm{X}) \succ N(\mathrm{Y}) \succ N(\mathrm{Z})$ であるのは，実は

$\mathrm{Z} \succ \mathrm{Y} \succ \mathrm{X}$ である.

(1)X vs Z,　X vs ZがXの0勝2敗

$$N(\mathrm{X}) + n_4 < N(\mathrm{Y}) + n_5 \qquad ①$$

$$N(\mathrm{X}) + n_3 < N(\mathrm{Z}) + n_2 \qquad ②$$

(2)Y vs Z,　Y vs XがYの1勝1敗

$$N(\mathrm{Y}) + n_0 < N(\mathrm{Z}) + n_1 \qquad ③$$

$$N(\mathrm{X}) + n_4 < N(\mathrm{Y}) + n_5 \qquad ④\equiv①$$

(3)Z vs X,　Z vs YがXの2勝0敗

$$N(\mathrm{X}) + n_3 < N(\mathrm{Z}) + n_2 \qquad ⑤\equiv②$$

$$N(\mathrm{Y}) + n_0 < N(\mathrm{Z}) + n_1 \qquad ⑥\equiv③$$

成立する不等式

場合Ⅰの十分条件は

YがXに対し有利:

$$N(\mathrm{X}) - N(\mathrm{Y}) < n_5 - n_4 \quad ①$$

ZがXに対し有利:

$$N(\mathrm{X}) - N(\mathrm{Z}) < n_2 - n_3 \quad ②$$

ZがYに対し有利:

$$N(\mathrm{Y}) - N(\mathrm{Z}) < n_1 - n_0 \quad ③$$

コンドルセの場合Ⅱ

$N(\mathrm{X}) \succ N(\mathrm{Y}) \succ N(\mathrm{Z})$だが、

実は $\mathrm{X} \succ \mathrm{Y}, \mathrm{Y} \succ \mathrm{Z}, \mathrm{Z} \succ \mathrm{X}$ である.

(1)X vs Y

①不成立

(2)Y vs Z

③成立

(3)Z vs X

②不成立

（注）この場合は，XもYも1勝1敗となる.

練習

場合Ⅲ：投票通りが真実である.

①, ②, ③ すべて不成立.

参考文献

- K. J. Arrow (1951) "Social Choice and Individual Values" John Wiley(邦訳あり)
- トドハンター(安藤洋一訳;2002)『確率論史』現代数学社
- 佐伯 胖(1980)『決め方の論理』東京大学出版会
- 松原　望(1997) 『計量社会科学』東京大学出版会
- 松原　望(2004) 『数理で読み解く社会トレーニング』東京大学出版会