ワンポイント練習　解答

ワンポイント練習 1（p.10）

［1.1］等しくない．ラプラスの定義で「平等に確からしい」とされるのは，ここでは 1,2,$\cdots$,6 からの 3 つの数の重複順列で (それは，$6^3 = 216$ 通りある)，たとえば，$\{1, 2, 6\}$ と記されたのは，(1，2，6)，(1，6，2)，(2，1，6)，(2，6，1)，(6，1，2)，(6，2，1) の順列で 6 通りある．このように考えると，

目の和が 9 になる順列は，6+6+3+3+6+1=25 通りある．他方，

目の和が 10 になる順列は，6+6+3+6+3+3=27 通りであるから，

後者の確率がより大きい．

ワンポイント練習 2（p.33）

［2.1］関数 $y = \frac{2x}{x+1}$ は単調増加関数で，$x = 0, 1$ に対し，$y = 0, 1$．

ゆえに，$0 \leqq y \leqq 1$ で，$\mathrm{Y} \leqq y$ を X について解くと，$\mathrm{X} \leqq \frac{y}{2-y}$．

ここで仮定より，

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqq u)=u$ であるから，

累積分布関数は，

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqq y) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqq \frac{y}{2-y}) = \frac{y}{2-y}$$

これを微分して，密度関数 $\frac{2}{(2-y)^2}$ を得る（図 1）．

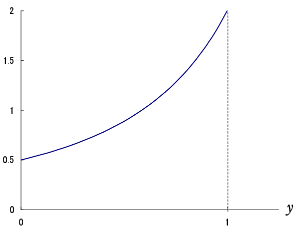

図 1　密度関数 $\frac{2}{(2-y)^2}$ のグラフ

ワンポイント練習 3（p.57）

［3.1］Excel 関数で直接に，$e^{-3} \cdot \frac{3^k}{k!}\,(k = 0, 1, \cdots, 9)$，および，$1 - e^{-3} \cdot \sum_{k=0}^{9} \frac{3^k}{k!}$ を計算すると下表（図 1）を得る．

もちろん，確率分布コマンド `POISSON`（引数(ひきすう)=3，$x = 0, 1, \cdots, 9$）を用いて

B2　=　=EXP(-3)*3^B1/FACT(B1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10以上
2	確率	0.0498	0.1494	0.224	0.224	0.168	0.1008	0.0504	0.0216	0.0081	0.0027	0.0011

図 2　Excel によるポアソン分布の確率の表

もよい．さらに，10 以上もこの関数で直接計算できる．

期待値は，上表（図 1）で上下の積和（「10 以上」は 10 として計算）をとると，2.9996．また，分散は，上表上段を $0,1^2,2^2,\cdots,$ と変えて，同様の積和をとれば，11.9917 となることから，$11.9917-(2.9996)^2=2.9940$ となる（2.4.5 式を用いる）．

ワンポイント練習 4（p.78）

［4.1］,［4.2］　$\mathrm{V}(2\mathrm{X}+\mathrm{Y})=4\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})=5\sigma^2\ (\sigma^2=\frac{35}{12})$.
同じく，$\mathrm{V}(\mathrm{X}+2\mathrm{Y})=5\sigma^2$．また，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(2\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{X}+2\mathrm{Y}) &= 2\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{X}+2\mathrm{Y})+\mathrm{Cov}(\mathrm{Y},\mathrm{X}+2\mathrm{Y})\\ &= 2\mathrm{V}(\mathrm{X})+2\mathrm{V}(\mathrm{Y})=4\sigma^2\end{aligned}$$

（$\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$ を用いた）．よって，$\rho_{2\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{X}+2\mathrm{Y}}=4\sigma^2\Big/\left(\sqrt{5\sigma^2}\right)^2=0.8$.
ここで，$\sigma^2=\frac{35}{12}$ という事実は用いていない．

ワンポイント練習 5（p.105）

［5.1］$\mathrm{P}(\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)$ は，$\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$ などから，
$(i,j)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ に対してそれぞれ，$\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10},\frac{4}{10}$.
よって，$\mathrm{P}(\mathrm{Z}=0|\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)$ は，同じく，$\frac{1}{20}\Big/\frac{1}{10}$，$\frac{2}{20}\Big/\frac{2}{10}$，$\frac{3}{20}\Big/\frac{3}{10}$，$\frac{4}{20}\Big/\frac{4}{10}$ で，すべて $\frac{1}{2}$.
ゆえに，$\mathrm{P}(\mathrm{Z}=1|\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)$ も，すべて $\frac{1}{2}$.
したがって，$\mathrm{E}(\mathrm{Z}|\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=j)$ も，同じく，$(\frac{1}{2})\cdot 0+(\frac{1}{2})\cdot 1$ から，すべて $\frac{1}{2}$.

［5.2］$\mathrm{E}(\mathrm{Z}|\mathrm{X},\mathrm{Y})$ はつねに $\frac{1}{2}$ であるから，X のいかんにかかわらず，左辺 $=\frac{1}{2}$．右辺の計算は以下のとおり．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) =}\frac{3}{10}\\
&\mathrm{P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) =}\frac{7}{10}\\
&\mathrm{P(Z = 0}, X = 0) = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} = \frac{3}{20}\quad \text{（同時確率分布の表より）}\\
&\mathrm{P(Z = 1}, X = 0) = \frac{1}{20} + \frac{2}{20} = \frac{3}{20}\quad \text{（同上）}
\end{aligned}$$

これより，$\mathrm{P(Z} = i\,|\mathrm{X = 0)}$ は，$i = 0, 1$ に対し，それぞれ $\frac{1}{2}$.
よって，$\mathrm{E(Z|X = 0)}=(\frac{1}{2})\cdot 0 + (\frac{1}{2})\cdot 1 = \frac{1}{2}$.
同様にして，$\mathrm{E(Z|X = 1)}=\frac{1}{2}$.
すなわち，X のいかんにかかわらず，$\mathrm{E(Z|X)}=\frac{1}{2}$.

訂正：塔定理において，$\mathrm{E(E(}\cdot\,|\,\mathcal{A}_2)\,|\,(\mathcal{A}_1))=\mathrm{E}(\cdot\,|\,\mathcal{A}_1)$ を
$\mathrm{E(E(}\cdot\,|\,\mathcal{A}_2)\,|\,\mathcal{A}_1)=\mathrm{E}(\cdot\,|\,\mathcal{A}_1)$ と訂正.

ワンポイント練習 6（p.129）

［6.1］$\mathrm{E(S}_{n+1}\,|\mathrm{S}_n)=\mathrm{E(S}_{n+1}+\mathrm{X}_{n+1}\,|\mathrm{S}_n)$
$=\mathrm{E(S}_n\,|\mathrm{S}_n)+\mathrm{E(X}_{n+1}\,|\mathrm{S}_n)=\mathrm{S}_n+\mathrm{E(X}_{n+1})=\mathrm{S}_n$
ここでは，式（5.4.1），（5.3.1），（5.3.2），仮定 $p = q$ をそれぞれ用いた．なお，$\mathrm{E(S}_n\,|\mathrm{S}_n)=\mathrm{S}_n$ で式（5.4.5）を用いたことはいうまでもない.

ワンポイント練習 7（p.164）

［7.1］（1）§7.4 で構成した $\mathcal{F}$ を，$\mathcal{F}_1$ とおく．さらに，X+Y=2,3,$\cdots$,11,12 の 11 通りの値に対応する可測集合の全体を $\mathcal{F}_2$ とおく.
いま，A= {(1, 1)，(2, 2)，(3, 3)，(4, 4)，(5, 5)，(6, 6)}，A′= {(1, 6)，(2, 5)，(3, 4)，(4, 3)，(5, 2)，(6, 1)} とおくと，$\mathrm{A}\in\mathcal{F}_1$，$\mathrm{A}'\in\mathcal{F}_2$ であるから，A，$\mathrm{A}'\in\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$．しかしながら，$\mathrm{A}\cup\mathrm{A}'\notin\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$.
（2）（7.1.1）～（7.1.3）をチェックすればよい．ここでは（7.1.3）にとどめる.
$\mathrm{A}_i\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ とすると，$\mathrm{A}_i\in\mathcal{F}_1$ から，$\bigcup_i \mathrm{A}_i\in\mathcal{F}_1$．同様にして，$\bigcup_i \mathrm{A}_i\in\mathcal{F}_2$.
ゆえに，$\bigcup_i \mathrm{A}_i\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$.

ワンポイント練習 8（p.187）

［8.1］式（8.1.6），（8.2.1）より，W(1),W(2) は，期待値がそれぞれ 1,2，分散がそれぞれ 4,8，共分散が 4（相関係数 $\frac{1}{\sqrt{2}}$）の多変量正規分布（§5.8）に従う．密度関数は式（5.5.3）で，$\mu_x = 1, \mu_y = 2, \sigma_x = 2, \sigma_y = 2\sqrt{2}, \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすればよく，$1 - \rho^2 = \frac{1}{2}$ などに注意しながら計算すると，

$$f(x, y) = \frac{1}{8\pi} \cdot \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)(y-2)}{4} - \frac{(y-2)^2}{8}\right]$$

（ただし，$\exp x \equiv e^x$）となる．

ワンポイント練習 9（p.211）

［9.1］式（9.5.5）に式（9.4.16）マルチンゲールであることを用いれば，ただちに従う．一般にマルチンゲールが確率積分で表現できることは広く知られている（たとえば，［22］）．

ワンポイント練習 10（p.244）

［10.1］下の Excel 表（図 3）のとおり．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1						現在株価　x_1			
2			820	830	840	850	860	870	880
3	ボラティリティ β	0.05	7.673581	12.1993	18.06982	25.17588	33.29905	42.17534	51.5549
4		0.1	19.02453	23.89176	29.43594	35.6343	42.44696	49.82147	57.69683
5		0.2	42.11093	47.25599	52.73941	58.5541	64.69062	71.13764	77.88241
6		0.3	65.23157	70.56293	76.11935	81.8964	87.88923	94.09243	100.5001
7		0.4	88.28855	93.78289	99.44536	105.2728	111.2617	117.4088	123.7103
8									
9	T=	0.5	(オプションの期間)						
10	K=	850	(権利行使価格)						
11	ρ =	0.05	(無リスク金利)						

図 3　Excel による株価とボラティリティの計算表